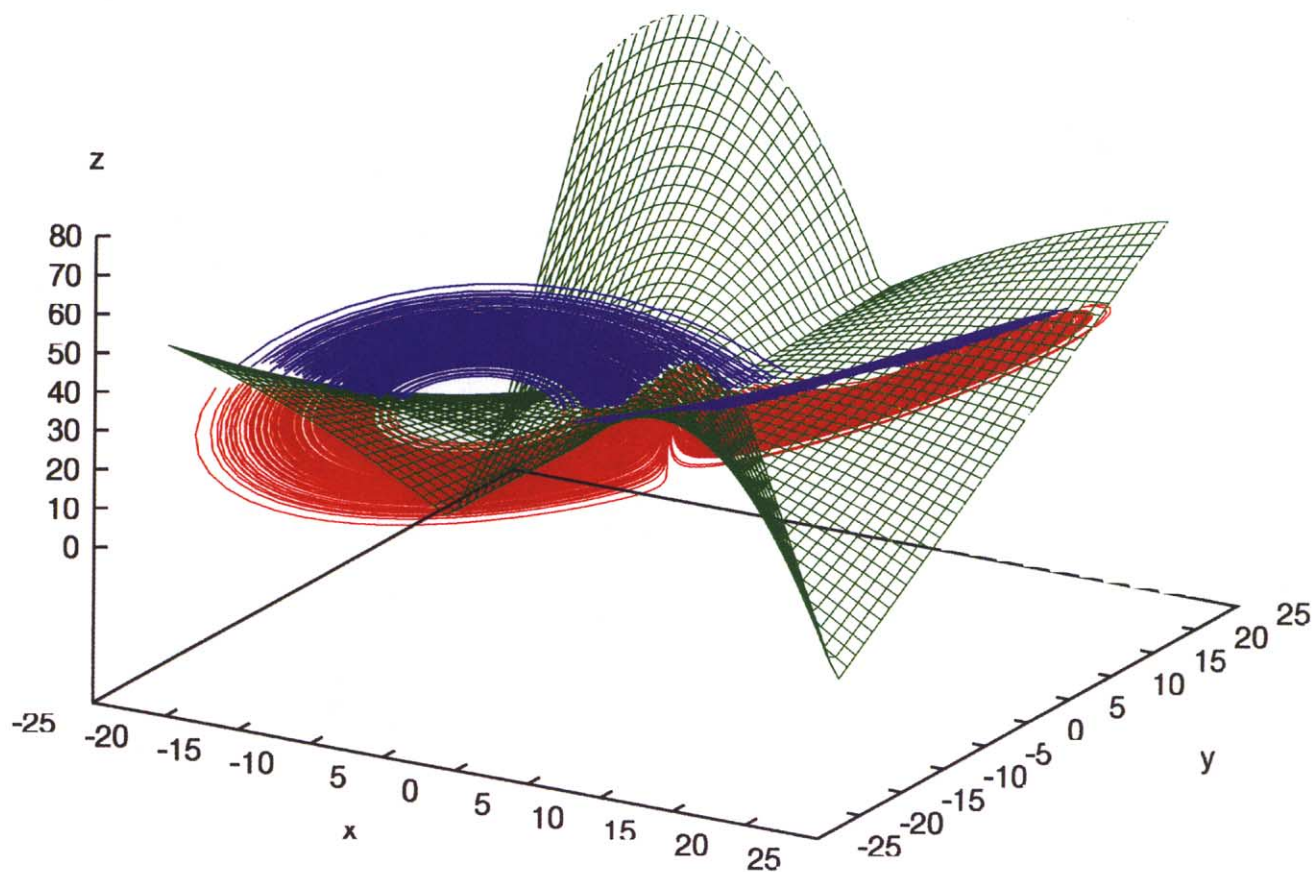




Aktuelle Beiträge zu Grundfragen der Meteorologie



Das Lorenz-Modell: Ein Paradigma für Wetter und Vorhersagbarkeit

1 EINFÜHRUNG

Es gibt immer wieder bemerkenswerte Arbeiten, die das 'Weltbild' der Meteorologie besonders beeinflussen und die deshalb zum Repertoire von Vorlesungszyklen gehören. Dazu zählen Rossby's (1939) Untersuchung über die freien planetarischen Wellen, Charney's und Eady's Veröffentlichungen (1947 bzw. 1949) zur baroklinen Instabilität von langen Zyklonen-Wellen, und schließlich auch Lorenz's (1963) Arbeit über das chaotische Verhalten einfacher konvektiver Strömungen. Die Analyse dieses Lorenz-Modells hat zu konzeptionellen Vorstellungen über die Komplexität von Wetter und Klima geführt und Untersuchungen auf dem Gebiet der chaotischen Dynamik sowie der Vorhersagbarkeit angeregt, die weit über die Fachrichtung Meteorologie hinausgehen. Hier soll das Lorenz-Modell dazu dienen, unterschiedliche Aspekte der Dynamik darzustellen:

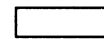
* In einer *Modell-Hierarchie* sind Systeme vom Typ des Lorenz-Modells eine wichtige Station auf dem Weg, der von der Beschreibung eines beobachteten Phänomens zu dessen Simulation, Prognose und zum Verständnis führen soll; hier ist die Rollen-Konvektion das Beispiel. Dieser Weg beginnt bei konzeptionellen Ansätzen oder Gedanken-Experimenten, geht weiter zur linearen Analyse und zu den Instabilitäts-Betrachtungen. Er setzt sich fort über nichtlineare niedrig-dimensionale (low order) Modelle und endet bei immer komplexer werdenden numerischen Simulationen. Hierin eingeschlossen ist auch das Problem der Vorhersagbarkeit.

* In einem *Aufbau* der dynamischen Meteorologie kann man mit der Analyse des Lorenz-Modells die Einführung der Boussinesq-Approximation zur Beschreibung konvektiver Strömungen verbinden, ähnlich wie die Flachwasser-Gleichungen zur Analyse freier Wellen der großräumigen planetarischen Skala abgeleitet werden oder das quasi-geostrophische System zur Beschreibung von Zyklonen und barokliner Instabilität in synoptischem Maßstab samt Lorenz Energie-Zyklus.

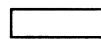
SKALEN-DIAGRAM

ZEIT-SKALA

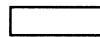
20 TAGE



PLANETARISCHE WELLEN

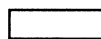


ZYKLONEN; ANTIZYKLONEN



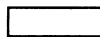
TROPISCHE ZYKLONEN

2 TAGE



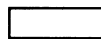
FRONTEN

6 STUNDEN



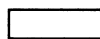
GEWITTER-ZELLEN

1 STUNDE



KONVEKTION, CUMULUS WOLKEN

10 MIN



TURBULENTE WIRBEL

RAUM-SKALA:

0.1 1 10 100 1000 10.000 km

* Bei den *Methoden* muß der Spektral-Ansatz erläutert werden. Die geometrischen Vorstellungen von Phasenraum und den entsprechenden physikalisch-meteorologischen Feldern lassen sich so leicht einführen. Hinzu kommt, daß dieser Ansatz auch in vielen Modellen der numerischen Wetterprognose (NWP) benutzt wird. Weitere Untersuchungen über die Dynamik im Phasenraum verwenden die bekannten Verfahren der linearen Algebra, der Systeme gewöhnlicher Differential-Gleichungen und die Ansätze zur Beschreibung kinematischer Strömungsfelder.

Danach beginnt die *Analyse* des Lorenz-Modells mit Stabilitätsuntersuchungen, lokal im Phasen-Raum und mit Hilfe von globalen Maßen. Externe Stabilitäts-analyse zeigt einen der Wege ins Chaos; er wird von Regime- und Bifurkations-Diagrammen begleitet. Interne Instabilitäten führen zum Vorhersagbarkeits-Problem; numerische Vorhersagbarkeitsexperimente beschreiben die sensitive Abhängigkeit des Systems von Anfangsbedingungen und damit Chaos. Der Lorenz-Attraktor wie auch viele andere einfache Systeme zeigen Falten und Strecken wie der Brot-

Teig, wenn er vom Bäcker ‘transformiert’ wird. Diese dynamische Vielfalt soll am Beispiel des Lorenz-Systems dargestellt werden. Die physikalischen Prozesse, die das Phänomen der Konvektion, der Wolken- und Niederschlagsbildung und deren räumlichen Organisation beschreiben, sind in der Natur jedoch erheblich komplexer als daß sie mit der extrem simplifizierenden Dynamik eines Modells vom Lorenz-Typ beschrieben werden können. Trotz (oder gerade wegen) dieser Realitätsferne hat der Entwurf des Lorenz-Modells und die Analyse des die Dynamik charakterisierenden Lorenz-Attraktors zu Konzepten über die komplexen Strukturen und den Approximationsgrad von Wetter und Klima und deren Vorhersagbarkeit geführt. Nach dem Modell-Bau (konzeptionelles Modell, lineares und nicht-lineares System; Sektion 2) wird die Dynamik im Phasenraum dargestellt und analysiert (Sektion 3 und 4), wo externe und interne Stabilitätsanalysen den Weg ins Chaos bzw. Probleme der Vorhersagbarkeit aufzeigen. Der Kreis schließt sich dadurch, daß die Dynamik auf dem Lorenz-Attraktor ein Konzept für Vorhersagbarkeitsanalysen liefert.

2 VOM KONZEPTIONELLEN ZUM NICHTLINEAREN MODELL: MODELL-HIERARCHIE UND -BAU

Eine Modell-Hierarchie beginnt bei konzeptionellen Ansätzen oder Gedanken-Experimenten, geht weiter zu den linearen Systemen und Instabilitäts-Analysen, setzt sich fort über nichtlineare low-order Modelle und endet schließlich bei numerischen Experimenten auf der Basis des nahezu vollständigen Gleichungssystems. Am Beispiel der Rollen-Konvektion soll eine solche Modell-Hierarchie bis zum Lorenz-System dargestellt werden, um dort strukturelle und interne Stabilität, Chaos und Vorhersagbarkeit zu diskutieren.

2.1 KONZEPTIONELLES MODELL

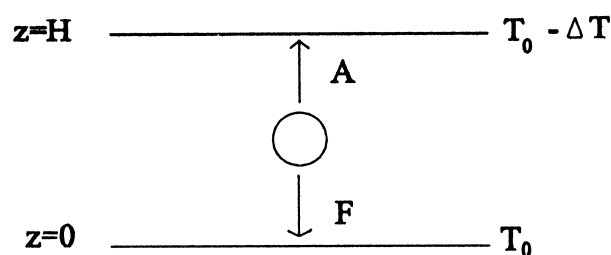
Der Konvektionsprozeß in einer Flüssigkeit zwischen zwei unterschiedlich warmen horizontalen Platten kann konzeptionell beschrieben werden (z.B. Argyris, Faust und Haase, 1995): Obere und untere Platte haben den Abstand H und konstante Temperaturen, $T_0 - \Delta T$ und T_0 . Ein Fluid-Element (oder Partikel) mit Radius r wird von der unteren Platte mit konstanter Geschwindigkeit $w \sim H/\tau$ aufwärts bewegt; dabei legt es in der Zeit τ den Weg H zurück (**FIGUR-1**). An dieser Bewegung wirken Auftriebskraft, A , und Reibungskraft, F , wobei Reibung dem Stokesschen Gesetz folgt (kinematische Viskosität, ν); in den Auftriebsterm geht die thermische Expansion, $\alpha = 1/T_0$, aus der Zustandsgleichung für Fluide ein:

$$F \sim \rho_0 \nu r |w|; \quad A \sim (\rho_e - \rho_b) g r^3 \sim \rho_0 (\alpha \Delta T) g r^3.$$

Bei dieser Verlagerung wird die Temperatur-Anomalie, δT , des Fluid-Elements zum einen bestimmt vom Wärmeaustausch durch seine Oberfläche, $\sim r^2$; sie hängt somit von der Temperatur/Wärme-Leitfähigkeit κ (in m^2/s) ab. Dieser Temperatur-Austausch wirkt mit einer thermischen Relaxationszeit, $\tau_{\text{therm}} \sim r^2/\kappa$, nach der die Partikel-Temperatur durch Wärmeleitung beeinflusst wird. Außerdem hängt die Temperatur-Anomalie des Elements von der vertikalen Verlagerung ab. Nach einer solchen dynamischen Zeitskala $\tau_{\text{dyn}} \sim H/w$ befindet sich das Fluid-Element (mit seiner Temperatur T_0 von der unteren Platte) in einer anderen Umgebung, die vom vertikalen Temperatur-Gradienten zwischen den Platten, $\Delta T/H$, vorgegeben ist. Sind beide Zeitskalen gleich, $\tau_{\text{therm}} \sim \tau_{\text{dyn}} \sim \tau$:

$$\delta T \sim |\Delta T/H| w \tau \sim |\Delta T/H| w r^2/\kappa.$$

Dann kann sich die ursprüngliche Temperatur des Elements auf dem Weg von der unteren zur oberen Platte durch Wärmeleitung abbauen. Ist außerdem bei dieser Verlagerung der Auftrieb größer als die Reibung, dann hat das Fluid-



FIGUR-1: Schematische Darstellung zur thermischen Konvektion und Rayleigh-Zahl; die vertikale Verlagerung verbindet die Zeit für den zurückgelegten Weg H (oder die Geschwindigkeit) mit dem thermischen Gedächtnis des Elements Wärmeleitung.

Element diese konvektive Bewegung und damit den Wärmetransport selbst durchführen können. Das diesen konvektiven Prozeß global charakterisierende Verhältnis von Auftrieb zu Reibung, $Ra=A/F$, führt zur Rayleigh-Zahl, Ra , als einen dimensionslosen Parameter:

$$Ra \sim g\alpha r^4 |\Delta T/H|/\nu\kappa \sim g\alpha H^3 \Delta T/\nu\kappa$$

mit dem Radius des größtmöglichen Elements, $r \sim H$. Ist die Rayleigh-Zahl klein, überwiegt also Reibung, so hat der vertikale Wärmetransport nicht durch Konvektion sondern durch Konduktion zu erfolgen. Systematische Zunahme der Rayleigh-Zahl führt bei einem kritischen Wert, Ra_c , jedoch zu einem Umschlag von Wärmeleitung in Konvektion und damit zu einer qualitativen oder strukturellen Änderung des Prozesses.

Ein solches Konzept-Modell ist nicht ausreichend, quantitative Aussagen über die geometrischen Strukturen der Konvektion abzuleiten, ebenso wenig zu ermitteln, bei welcher minimalen Parameter-Anregung oder Temperatur-Differenz (kritische Rayleigh-Zahl) die Konduktion in konvektive Strömung umschlägt. Das ermöglicht erst das lineare Modell und die Stabilitätsanalyse eines durch kleine Änderungen gestörten sonst aber bewegungsfreien Grundzustandes. Dem linearen Modell liegt die dem Konvektions-Phänomen entsprechende Boussinesq-Approximation der hydro-thermodynamischen Grundgleichungen - eigentlich nach vorausgegangener Skalen-Analyse - zugrunde.

2.2 BOUSSINESQ-APPROXIMATION

Das konzeptionelle Modell zeigt, daß Auftrieb, Wärmeleitung und Reibung die wesentlichen an der Rayleigh-Benard Konvektion beteiligten Prozesse sind. Dem entspricht die Boussinesq-Approximation der hydro-thermodynamischen Grundgleichungen, die zur Beschreibung flacher Konvektionsströmungen hergeleitet wurde. Aber auch bei einfachen Modellen von Strömungen größerer Skalen wird sie (in hydrostatischer Approximation) häufiger verwendet: zum Beispiel bei der Untersuchung langer synoptischer Wellen (barokline Instabilität und Eady-Modell) und auf planetarischer Skala. Die Boussinesq-Approximation besteht formal in folgendem (siehe z.B. Lindzen 1990): Die thermodynamischen Größen werden um einen Referenz-Zustand (Index 'o': hydrostatisch, adiabatisch geschichtet und in Ruhe) linear entwickelt (*). Weiter ist die Strömung inkompressibel, die temperaturabhängige Dichte ist nur im Auftriebsterm wirksam und sonst konstant, und die Zustandsgleichung vereinfacht sich, da $p^*/p_o \ll \rho^*/\rho_o, T^*/T_o$:

$$\begin{array}{ll} \text{BEWEGUNGSGLG:} & d\mathbf{v}/dt = -\nabla(p^*/\rho_o) - \mathbf{k}g(\rho^*/\rho_o) + \mathbf{F} \\ \text{1. HAUPTSATZ:} & dT^*/dt = \kappa \nabla^2 T^* \\ \text{KONTINUITÄT:} & \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ \text{ZUSTANDSGLG:} & \rho = \rho_o(1 - \alpha(T - T_o)). \end{array} \quad (1)$$

Dabei sind der vertikale Einheitsvektor $\mathbf{k}$, die Reibung $\mathbf{F} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (u, v, w)$; weitere Konstanten des Systems sind Schwerebeschleunigung g , thermische Expansion $\alpha = 1/T_o$, kinematische Viskosität ν und thermische Leitfähigkeit κ . Mit der thermischen Expansion $\alpha = 1/T_o$ wird die Zustandsgleichung $\rho^*/\rho_o = -T^*/T_o$. Berücksichtigt man die Dichteveriationen des Referenz-Zustandes, $\rho_o = \rho_o(z)$, erhält man als Kontinuitätsgleichung $\text{div}_{\rho_o} \mathbf{v} = 0$, und damit die anelastische Approximation.

2.3 LINEARISIERUNG UND RAYLEIGH-BENARD INSTABILITÄT

Zur Vereinfachung der Dynamik werden nur Konvektions-Rollen parallel zur y-Richtung zugelassen; das heißt, die Bewegung ist y-unabhängig ($\partial/\partial y = 0$) und erscheint in der (x,z)-Ebene mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (u, w)$. Die Strömung des Fluids wird von der horizontalen Komponente der Vorticity $\zeta = \mathbf{j} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = w_x - u_z$ beschrieben. Sie ergibt sich aus den Bewegungsgleichungen unter Verwendung der Stromfunktion ψ mit $(u, w) = (-\psi_z, \psi_x)$ und der 2-dimensionalen Kontinuitätsgleichung, $\nabla \cdot \mathbf{v} = u_x + w_z = 0$, so daß $\zeta = \nabla^2 \psi = \psi_{xx} + \psi_{zz}$. Hinzu kommt der erste Hauptsatz. So ergibt sich ein dynamisches System, das ähnlich der quasi-geostrophischen Approximation, den Konvektions-Prozeß durch Vorticity- und thermische Energie-Gleichung beschreibt:

$$\begin{array}{lll} \text{VORTICITY:} & \partial(\nabla^2 \psi)/\partial t & = -J(\psi, \nabla^2 \psi) + g\alpha \partial\theta/\partial x + \nu \nabla^4 \psi \\ \text{1. HAUPTSATZ:} & \partial\theta/\partial t & = -J(\psi, \theta) + (\Delta T/H) \partial\psi/\partial x + \kappa \nabla^2 \theta. \end{array} \quad (2)$$

Dabei ist $\theta=T^*$ die Temperaturabweichung vom Vertikalprofil $T_0-(\Delta T/H)z$ mit dem Gradienten $\Delta T/H$. Die einzige Nichtlinearität des Systems liegt in der Advektion; sie wird vom Jacobi-Operator J bezüglich x und z , $J(\psi, \theta) = \psi_x \theta_z - \psi_z \theta_x$, beschrieben. So tritt Temperatur Advektion auf, wenn sich die ψ -Stromlinien mit den θ -Isolinien schneiden, da $J(\psi, \theta) = \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = (u, w) \cdot \nabla \theta = (\mathbf{j} \times \nabla \psi) \cdot \nabla \theta = \mathbf{j} \cdot (\nabla \psi \times \nabla \theta)$; das gleiche gilt für die Vorticity-Advektion. Der übliche Ansatz kleiner Störungen ()' eines Grundzustandes $[\]: \theta=[\theta]+\theta'$, $\psi=[\psi]+\psi'$, wird (i) in die Boussinesq-Gleichungen eingesetzt, (ii) die Gleichungen für den Grundzustand (Hydrostasie und Ruhe), $\partial[p^*/\rho_0]/\partial z=g[\theta/T_0]$ und $[\mathbf{v}]=0$, werden subtrahiert und (iii) nichtlineare Terme oder Advektion, J , vernachlässigt:

$$\begin{aligned} \text{VORTICITY:} & \quad \{\partial/\partial t - \mathbf{v} \nabla^2\} \nabla^2 \psi' = +g\alpha \partial \theta'/\partial x \\ \text{1. HAUPTSATZ:} & \quad \{\partial/\partial t - \kappa \nabla^2\} \theta' = +(\Delta T/H) \partial \psi'/\partial x. \end{aligned} \quad (3)$$

Nach Einführung dimensionsloser Variabler, $(x, z)/\{H\}$, $t/\{H^2/\kappa\}$, $\theta'/\{\Delta T\}$, ψ'/κ mit der Prandtl-Zahl $\sigma=\nu/\kappa$, und nach Eliminierung der Temperatur θ' schreibt sich das linearisierte System in Form einer partiellen Differentialgleichung 6. Ordnung in x und z und 2. Ordnung in t (Schwingungsgleichung):

$$\{\partial/\partial t - \nabla^2\} \{\sigma^{-1} \partial/\partial t - \nabla^2\} \nabla^2 \psi' = +Ra \psi'_{xx}. \quad (3a)$$

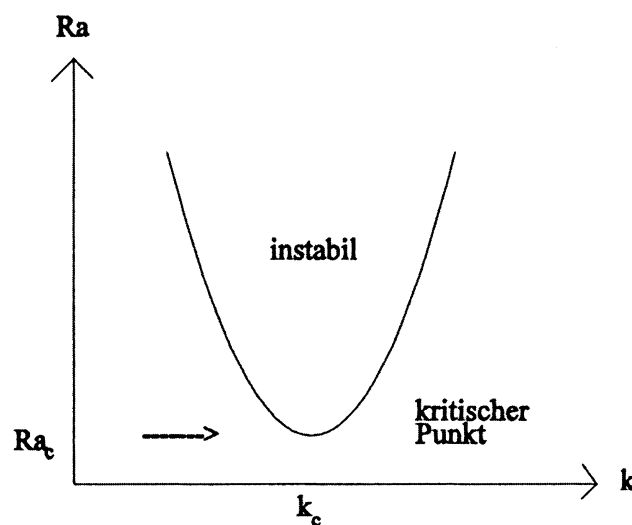
Die Rayleigh-Zahl $Ra=\alpha g H^3 \Delta T/\nu \kappa$ oder Temperatur-Differenz ΔT ist die parametrische Anregung; ihre systematische Zunahme führt zur Rayleigh-Benard Instabilität. Quantitative Aussagen über die Instabilität des Systems liefert der übliche Wellenansatz mit $\psi'(x, z, t)=\text{Re} \sum_k \Psi_k(z) \exp\{S(k)t\} \exp(ikx)$. Er führt auch zur allgemeinen Lösung, da (über alle k summiert) alle ψ' Konfigurationen repräsentiert werden; dabei sind k und Ψ_k die horizontale Wellenzahl und die komplexen Fourier-Amplituden; $S(k)=s(k)+i\omega(k)$ ist die komplexe Phasenfunktion; ihr Realteil $\text{Re}(S)=s(k)$, definiert die Wachstumsrate der Amplitude der 'zonalen' Partialwelle k , der Imaginär-Teil ist proportional zur Phasengeschwindigkeit, $\omega(k)/k$. Wegen der Linearität läßt sich Stabilität getrennt für jede Partialwelle aus der allgemeinen Lösung ermitteln. Das liefert eine Differentialgleichung 6. Ordnung in z mit sechs Randbedingungen unten, oben ($z=0, 1$):

$$(d^2/dz^2 - S(k) - k^2)(d^2/dz^2 - S(k)\sigma^{-1} - k^2)(d^2/dz^2 - k^2) \Psi_k(z) = -Ra(k)^2 \Psi_k(z). \quad (3b)$$

RANDWERTPROBLEM: An einem "freien" Rand verschwinden Vertikalgeschwindigkeit und tangentiale Schubspannung: Mit $w=\psi'_z=0$ folgt $\psi'=\text{const}=0$, mit $u_z=-\psi'_z=0$ folgt $\nabla^2 \psi'=0$, so daß $\psi'=d^2 \psi'/dz^2=d^4 \psi'/dz^4=0$ etc. An einem "festen" (no-slip) Rand verschwinden Vertikalbewegung und Tangentialgeschwindigkeit: $\psi'=0$, $u=-\psi'_z=0$. Am oberen und unteren Rand, sei er "frei" oder "fest", wird außerdem die Temperatur konstant gehalten: $\theta'=0$; damit sind an den Rändern auch $J(\psi', \nabla^2 \psi')=J(\psi', \theta')=0$. Das Rayleigh-Bénard-Problem ist am einfachsten zu behandeln bei freien Rändern oben und unten, obwohl dies nicht besonders realistisch ist.

Bei freiem Rand vereinfacht sich der Lösungs-Ansatz zu $\Psi_k(z, m)=\sin(m\pi z)$ für alle k . Die vertikalen Wellenzahlen $m=1, \dots$ bzw. Wellenlängen $2\pi(2H)\dots$, führen zu quadratischen Eigenwert-Gleichungen in $S(k; Ra, \sigma)$:

$$(m^2 \pi^2 + S(k) + k^2)(m^2 \pi^2 + S(k)\sigma^{-1} + k^2)(m^2 \pi^2 + k^2) = k^2 Ra. \quad (3c)$$



FIGUR-2: Neutrale Kurve (marginal stabil) im $(Ra(m=1), S(k))$ -Diagramm.

Nichttriviale Lösungen des Randwert-Problems heißen Eigenlösungen mit den Eigenwerten $S(k)$. Für vorgegebene externe Parameter (Ra, σ) ist eine *beliebige* Störung stabil, wenn für *alle* ihre Partial-Wellen die Realteile der Eigenwerte $\text{Re}(S)=s(k)<0$ sind, und instabil, wenn für *eine* der Partial-Wellen $s(k)>0$ ist. Das führt zum Ziel der Stabilitäts-Analyse, die geometrische Struktur der Konvektions-Zelle zu identifizieren, die bei minimaler Parameter-Anregung Ra instabil wird und die dazugehörige kritische Rayleigh-Zahl.

KRITISCHER PUNKT: Neutrale Stabilität oder $s(k)=0$ beschreibt Zustände auf einer Hyperfläche, die Stabilität von Instabilität im Parameter-Wellenzahl-Raum trennt: $Ra(m,k)=(m^2\pi^2+k^2)^3/k^2$. Auf der Hyperfläche ist die kritische Rayleigh-Zahl Ra_c als ein Minimum definiert, das die Instabilität (von mindestens einer Partialwelle mit $s(k)>0$, falls $Ra>Ra_c$) von der Stabilität aller Partialwellen (mit $s(k)<0$, falls $Ra<Ra_c$) trennt. Da $Ra(m=1,k) < Ra(m=2,k) < \dots$, braucht nur noch die kleinste Rayleigh-Zahl

$$Ra(m=1,k) = (\pi^2 + k^2)^3/k^2,$$

die zur vertikalen Wellenzahl $m=1$ oder Wellenlänge $2H$ gehört, bezüglich der horizontalen Wellenzahl k minimiert zu werden: $d\{Ra(m=1,k)\}/dk=0$. Diese Bedingung (**FIGUR-2**) führt zu der (zu $m=1$ gehörenden) kritischen horizontalen Wellenzahl $k_c=\pi/\sqrt{2}$ oder Wellenlänge $l_c=(2\pi/k)H$, der kritischen Rayleigh-Zahl $Ra_c=\pi^4(1+a^2)^3/a^2=27\pi^4/4 \approx 675.5$, und zum Höhen/Breiten- oder Aspekt-Verhältnis $a=2H/L=1/\sqrt{2}$. Andere Randbedingungen modifizieren das Ergebnis (Tabelle).

TABELLE: Kritische Rayleigh-Zahl und Wellenzahl abhängig von Bedingungen am oberen/unteren Rand.

RAND	frei/frei	fest/fest	fest/frei
Ra_c	657.5	1708	1101
k_c	2.2	3.12	2.68

2.4 LINEARE STABILITÄTS-ANALYSE IM PHASENRAUM

Eine vertikale und eine zonale Wellenzahl, $(m=1,k_c)$, kennzeichnen die geometrische Struktur der bei minimaler Parameter-Anregung Ra_c (kritischer Rayleigh-Zahl) entstehenden instabilen Konvektions-Zelle (**FIGUR-3**). Beide Wellenzahlen sind durch das Aspektverhältnis a miteinander verbunden. Damit wird die Dynamik von $\psi'(x,z;t), \theta'(x,z;t)$ des linearen konvektiven Fluids von einem Stromfunktion- und Temperatur-Mode beschrieben:

STROMFUNKTION- UND TEMPERATUR-MODE: $\psi_1 = \Psi_1(t)F_0(1,1)$ und $\theta_1 = \Theta_1(t)F_1(1,1)$

mit den entsprechenden (nicht normierten) räumlichen Eigenfunktionen $F(k,m)$: $F_0(1,1) = \sin(\pi x/H)\sin(\pi z/H)$ und $F_1(1,1) = \cos(\pi x/H)\sin(\pi z/H)$ in der (x,z) -Ebene. Die Eigenfunktionen haben je ein Extremum im Zentrum der Stromlinien-Rolle (Vorticity) sowie der um $\frac{1}{2}\pi$ in x -Richtung phasenverschobenen Temperatur-Zelle (siehe 3b). Zeitliche Änderungen aller Moden-Amplituden sind im linearen System gleich; bei Instabilität wachsen sie exponentiell an, $\Psi_1(t), \Theta_1(t) = [\Psi_1, \Theta_1] \exp\{s(k)t\}$. Wird der so auf eine Mode beschränkte Reihen-Ansatz für $\psi'=\psi_1+\dots$ und $\theta'=\theta_1+\dots$, in die lineare Vorticity- und thermische Energie-Gleichung (3b, mit $\nabla^2=(1+a^2)(\pi/H)^2$) eingesetzt, erhält man folgende linearen Differentialgleichungen für die Amplituden

DIMENSIONIERTE FORM

$$\begin{aligned} d\Psi_1/dt &= -\Psi_1 \nu (\pi/H)^2 (1+a^2) + \Theta_1 (g\alpha/(1+a^2)) a (\pi/H)^{-1} \\ d\Theta_1/dt &= +\Psi_1 (\Delta T/H) a \pi/H + \Theta_1 \kappa (\pi/H)^2 (1+a^2) \end{aligned}$$

DIMENSIONSLOSE FORM

$$\begin{aligned} dX/d\tau &= -\sigma X + \sigma Y \\ dY/d\tau &= +\tau X - Y \end{aligned} \quad (3d)$$

nach Division durch $\kappa(\pi/H)^2(1+a^2)$ und Multiplikation der oberen und unteren Gleichung mit $a/\{\sqrt{2}(1+a^2)\kappa\}$ bzw. $r\pi/(\Delta T\sqrt{2})$, Einführung der relativen Rayleigh-Zahl $r=Ra/Ra_c$ mit $Ra_c=\pi^4(1+a^2)^3/a^2$, macht die Variablen des Systems dimensionslos. Damit wird aus der Zeit $\tau = t\kappa(\pi/H)^2(1+a^2)$, der Stromfunktion $X = \Psi_1 a / \{\sqrt{2}\kappa(1+a^2)\}$ und der Temperatur $Y = \Theta_1 r\pi/(\Delta T\sqrt{2})$. Diese Darstellung (Glg. 3d) der linearen Konvektionsrolle nahe dem kritischen Punkt legt den Grundstein für das Lorenz-Modell: Die Konvektionsrolle *und* ihre zeitliche Entwicklung, ursprünglich dargestellt als Stromfunktion und Temperatur-Anomalie $\psi_1(x,z;t) = \Psi_1(t)\sin(\pi x/H)\sin(\pi z/H)$ und $\theta(x,z;t) = \Theta_1(t)\cos(\pi x/H)\sin(\pi z/H)$, wird abgebildet auf Orte $\mathbf{X}=(X,Y)$ und Trajektorien $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, \tau)$ im (X,Y) -Phasenraum. Dort wird die Dynamik von einem System autonomer gewöhnlicher Differentialgleichungen (Glg. 3d) beschrieben, das analog der Kinematik von Strömungen nahe einem ruhenden Grundzustand interpretiert und durch einen Exponential-Ansatz gelöst werden kann.

Die Lösungen des linearen Systems charakterisieren die Stabilität des gestörten Grundzustandes, der Fixpunkt ($d/dt=0$) der linearen oder Störungsgleichungen (Glg. 3d) ist. Er liegt im 'Ursprung' und repräsentiert das ruhende Fluid:

URSPRUNG: $C_1=(X,Y)=(0,0)$

Störungen eines Grundzustandes werden (in einem linearen System) von der Dynamik der Lösungstrajektorien $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, \tau)$ beliebiger Anfangswerte $\mathbf{X}_0$ beschrieben. Man erhält sie mit einem Exponential-Ansatz $\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}_0 \exp(\lambda t)$, der zum Eigenwertproblem $|\mathbf{J}-\lambda \mathbf{I}|=0$ und den Eigenwerten λ der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}$ des Systems führt. Selten werden die dazu gehörenden Eigenvektoren analysiert, die die asymptotischen Hauptrichtungen des Lösungsflusses anzeigen. Während lineare Systeme (wie Glg. 3d) dadurch global erfaßt werden, gelten die Aussagen für nichtlineare Systeme nur lokal in einer nahen Umgebung eines (hyperbolischen) Ortes. Bei der Jacobi-Matrix zu (Glg. 3d)

$$J = \begin{pmatrix} (dX/d\tau)_X & (dX/d\tau)_Y \\ (dY/d\tau)_X & (dY/d\tau)_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix}$$

interessieren die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte, $\text{Re} \lambda \neq 0$ und $\text{Im} \lambda$ und deren Abhängigkeit von der relativen Rayleigh-Zahl r (bei festem $\sigma=10$). Das charakteristische Polynom hat immer eine negative reelle Wurzel (Eigenwert):

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (\sigma+1)\lambda - \sigma(r-1) = 0, \text{ wobei } \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(\sigma+1) \pm \{\frac{1}{4}(\sigma+1)^2 + \sigma(r-1)\}^{1/2}.$$

Mit systematisch von $r=0$ anwachsendem parametrischen Antrieb ändert sich die Struktur des Systems bei $r=1$, wenn ein Eigenwert die imaginäre Achse kreuzt, also von zwei negativen reellen Eigenwerten einer positiv wird. Damit ändert sich der Fluß der Lösungen vom stabilen Knoten zum instabilen Sattel, also von der 'stabilen' Konduktion im ruhenden System zur exponentiell anwachsenden Störung bei einsetzender 'instabiler' Konvektion:

$0 < r < 1$:	$\lambda_{1,2} < 0$:	Konduktion, stabiler Knoten, exponentiell abklingend,
$r = 1$:	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$:	ein Eigenwert kreuzt die imaginäre Achse,
$r > r_1 = 1$:	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$:	Konvektion, instabiler Sattel, exponentiell wachsend.

Um den Fluß von Lösungstrajektorien $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t)$ im Phasenraum zu charakterisieren - lokal bei nichtlinearen Systemen und global bei linearen - reicht oft diese Art einer 'qualitativen Dynamik' aus, wie sie vom Eigenwertproblem des dynamischen Systems beschrieben wird. Hiermit sind die Grenzen des linearen Modells erreicht, obgleich sich noch Anfangswert-Probleme etc. analysieren lassen. Denn mit einsetzender Konvektionsbewegung tritt Advektion auf und damit Wechselwirkungen zwischen dem Stromfunktion- und Temperatur-Mode, wie sie der Jacobi-Operator $J(\psi, \theta)$ im nichtlinearen System (3) repräsentiert. Solche Wechselwirkungen oder Nichtlinearitäten sind in einem linearisierten Modell nicht vorhanden und sollen deshalb im nächsten Schritt berücksichtigt werden.

2.5 NICHTLINEARES SYSTEM: MIT DER SPEKTRAL-TRANSFORMATION ZUM LORENZ-MODELL

Der Einfluß nichtlinearer Vorgänge auf die Dynamik des konvektiven Systems soll in einer ersten Näherung untersucht werden. Dazu wird ein Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen hergeleitet, um eine analytisch/numerische Analyse zu ermöglichen. In der Herleitung folgt man meist einem Rezept, das für den Bau einfacher niedrig-dimensionaler (low order) nichtlinearer Modelle angewendet wird (Ghil und Childress 1987). Die Konstruktion erfolgt in drei Schritten: (1) Auswahl und Vereinfachung des geeigneten Gleichungssystems (hier: Boussinesq-System und Rollen-Konvektion), (2) die spektrale Transformation des nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystems in ein System autonomer gewöhnlicher Differentialgleichungen und (3) durch Beschränkung auf nur wenige 'Moden' ein analysierbares nicht-lineares Modell niedriger Ordnung zu erhalten: Hier ist es das klassische Modell der Rollen-Konvektion (Saltzman 1962, Lorenz 1963).

ERSTER SCHRITT (BEWEGUNGSGLEICHUNGEN UND VEREINFACHUNG DER DYNAMIK): Das System partieller Differentialgleichungen, das die Dynamik von Strömungen beschreibt, sollte relativ einfach sein und die wesentliche Physik enthalten. Hier ist es die Boussinesq-Approximation der dynamischen Grundgleichungen für konvektive Strömungen. Weiter wird die Dynamik auf zwei Dimensionen reduziert und nur Konvektions-Rollen parallel zur y -Richtung zugelassen. Diese Strömung wird von der Vorticity-Gleichung und dem ersten Hauptsatz (2) vollständig beschrieben.

ZWEITER SCHRITT (UMFORMUNG IN SPEKTRALFORM): Das dynamische System partieller Differentialgleichungen wird in einen Satz gewöhnlicher autonomer Differentialgleichungen transformiert: Felder und ihre

zeitliche Entwicklung werden damit auf Punkte und Trajektorien im Phasenraum abgebildet. Dazu werden die Terme der partiellen Differentialgleichungen in Reihen von (vorzugsweise abzählbaren $k=1,2,\dots$) Orthonormalfunktionen F_k entwickelt. Diese Funktionen sind üblicherweise die Eigenfunktionen des Laplace-Operators im Integrationsgebiet, die den Randbedingungen genügen. Die F_k sind damit Lösungen der Helmholtz-Gleichung, $\nabla^2 F = \lambda F$. Mit einem Ansatz für $\psi(x,z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t) F_k(x,z) = X_k F_k$ und entsprechend für $\theta(x,z,t)$ erhält man (nach Einsetzen, Multiplikation mit der entsprechenden Eigenfunktion und Integration) ein System gewöhnlicher autonomer Differentialgleichungen für die zeitliche Entwicklung der Amplituden $\mathbf{X} = X_j(t)$ mit Wechselwirkungs-Koeffizienten und parametrischer Anregung, a_{jk}, b_{jk} :

$$dX_j/dt = \sum_{k,l} a_{jkl} X_k X_l + \sum_k b_{jk} X_k \text{ oder } d\mathbf{X}/dt = \mathbf{V}(\mathbf{X}).$$

DRITTER SCHRITT (TRUNCATION UND MODELL-BAU): Der letzte Schritt besteht aus dem geeigneten Abhacken (truncation) der unendlichen Funktionen-Reihe und in der Wahl geeigneter Moden, um ein endliches System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu erhalten. Die Grenze des "Abhackens" wird durch den Kompromiß zwischen zwei sich widersprechender Forderungen bestimmt: Lösungsvielfalt und ausreichende Darstellung der Physik - Zugänglichkeit und Verstehen der Lösungen. So hofft man, daß Systeme von relativ geringer Ordnung (und relativ wenigen Basisfunktionen) zumindest qualitativ wesentliche Strukturen des Phänomens widerspiegeln. Nun sind mindestens drei Moden in einem zeitkontinuierlichen System notwendig, um deterministisches Chaos zu erzeugen. Um diese drei Moden zu bestimmen, wird hier ein direkter Weg beschritten; er kann allgemein zur Auswahl geeigneter Moden und auch zur Konstruktion anderer niedrig-dimensionaler nichtlinearer Systeme angewandt werden, wenn sie die Dynamik in der Nachbarschaft von Instabilitäten eines linearen Modells beschreiben sollen.

LORENZ GLEICHUNGEN: Im nichtlinearen System (3) entwickeln sich die beiden Amplituden der zur Konvektionsrolle gehörenden Stromlinien- und Temperatur-Moden, $\psi_1(x,z,t)$ und $\theta_1(x,z,t)$, nicht mehr jede für sich exponentiell wachsend, sondern in Wechselwirkung miteinander. Diese Wechselwirkung wird verursacht durch ihre räumlichen Eigenfunktionen $F_0(1,1) = \sin(\pi ax/H) \sin(\pi z/H)$, $F_1(1,1) = \cos(\pi ax/H) \sin(\pi z/H)$ in den Advektionstermen. Eingesetzt in Vorticity- und Temperatur-Gleichung erhält man:

VORTICITY:

$$\begin{aligned} \partial(\nabla^2 \psi_1)/\partial t &= -(\partial \Psi_1/\partial t)(1+a^2)(\pi/H)^2 F_0 \\ J(\psi_1, \nabla^2 \psi_1) &= 0 \\ g\alpha(\partial \theta_1/\partial x) &= -\Theta_1 g\alpha a(\pi/H) F_0 \\ v\nabla^4 \psi_1 &= +\Psi_1 v(1+a^2)^2(\pi/H) F_0 \end{aligned}$$

1. HAUPTSATZ:

$$\begin{aligned} \partial \theta_1/\partial t &= (\partial \Theta_1/\partial t) F_1 \\ J(\psi_1, \theta_1) &= \frac{1}{2}(\Theta_1 \Psi_1) a(\pi/H)^2 \sin(2\pi z/H) \\ (\Delta T/H)(\partial \psi_1/\partial x) &= \Psi_1 (a \Delta T/H)(\pi/H) F_1 \\ \kappa \nabla^2 \theta_1 &= -\Theta_1 \kappa(1+a^2)(\pi/H)^2 F_1 \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß ein neuer zusätzlicher Mode nicht durch die Vorticity-Advektion, $J(\psi_1, \nabla^2 \psi_1)$, sondern nur durch die Temperatur-Advektion $J(\psi_1, \theta_1)$ angeregt wird; das heißt, durch die nichtlineare Wechselwirkung der Vorticity- und Temperatur-Mode mit den Eigenfunktionen $F_0(1,1)$ und $F_1(1,1)$. Dieser neue Mode ergänzt die beiden ursprünglichen Moden ψ_1, θ_1 des linearen Modells (3d: Grundstein des Lorenz-Systems) zu einem Satz von insgesamt drei Moden $\psi_1, \theta_1, \theta_2$, dem angestrebten Ziel:

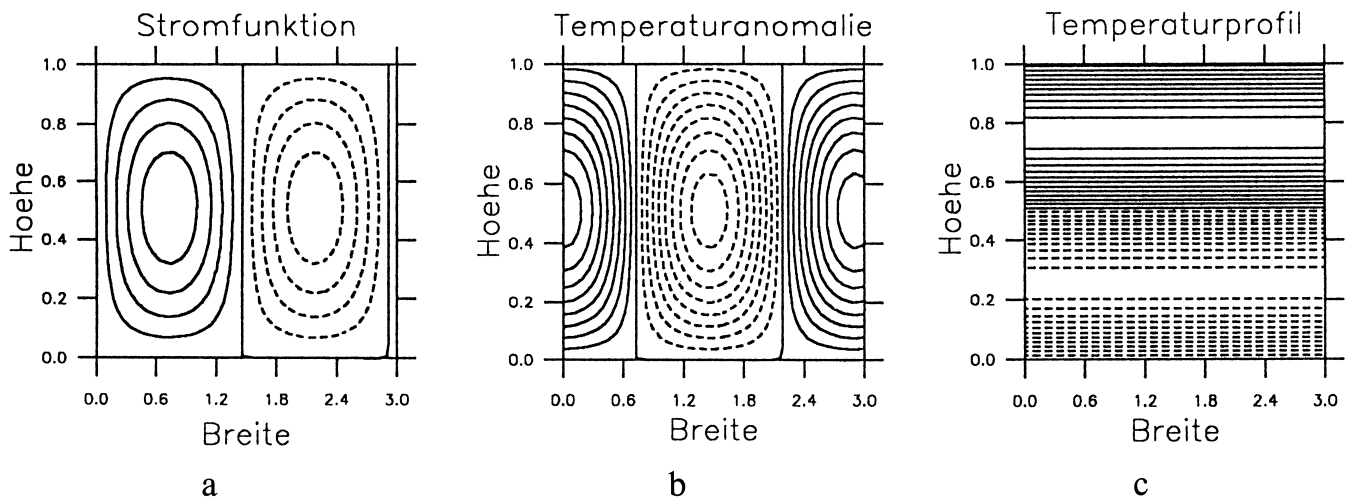
ZWEITER TEMPERATUR-MODE:

$$\theta_2(x,z,t) = \Theta_2(t) F_2(0,2),$$

wobei die räumliche Eigenfunktion $F_2(0,2) = \sin(2\pi z/H)$ ist; θ_2 charakterisiert eine Anomalie des vertikalen Temperatur-Profils. Dieser Mode ist horizontal homogen; er besitzt, wegen der vertikalen Wellenzahl 2, oben und unten unterschiedliches Vorzeichen und charakterisiert Änderungen der Schichtung (**FIGUR-3**). Er beeinflusst die zeitliche Entwicklung des Systems über $\partial \theta/\partial t$. Wegen der erwünschten Wellenzahl-Begrenzung (hier auf maximal zwei) sollen weitere Wechselwirkungen und damit weitere Anregungen höherer Moden wegfallen. Das bedeutet, daß die zusätzliche Funktion $F_4(1,3) = \cos(\pi ax/H) \sin(3\pi z/H)$, die aus der Wechselwirkung der Moden ψ und θ in der temperatur-Advektion resultiert, vernachlässigt wird:

$$J(\psi_1, \theta_2) = (\Psi_1 \Theta_2) a(\pi/H)^2 [F_1 + \cos(\pi ax/H) \sin(3\pi z/H)] \approx (\Psi_1 \Theta_2) a(\pi/H)^2 F_1.$$

Nun können die endlichen Funktions-Reihen für die Stromfunktion (oder Vorticity) und Temperatur-Anomalie, $\psi = \psi_1, \dots$ und $\theta = \theta_1 + \theta_2, \dots$, in die Vorticity- und thermische Energie-Gleichung des Boussinesq-approximierten Systems (3) eingeführt werden. Das heißt, das dynamische System besitzt eine Vorticity- oder Stromfunktion-Mode ψ_1 und zwei Temperatur-Moden θ_1, θ_2 . Damit erhält man direkt (und ohne numerische Experimente mit allen sonst noch in Frage kommenden Moden) den von Saltzman (1962) aufgestellten und von Lorenz (1963) analysierten Satz autonomer gewöhnlicher Differentialgleichungen für die zeitlich veränderlichen Amplituden $\Psi_1(t), \Theta_1(t), \Theta_2(t)$. Das niedrigdimensionale Modell beschreibt in erster Näherung die nichtlineare Konvektions-Dynamik nahe dem kritischen Punkt:



FIGUR-3: Die Moden der Stromfunktion und Temperatur-Anomalie, $\psi_1(k=1,m=1)$, $\theta_1(k=1,m=1)$ und $\theta_2(k=0,m=2)$ in Form der daran beteiligten horizontalen und vertikalen Wellen und in räumlicher Zusammensetzung.

AMPLITUDEN:	-----LINEARES MODELL-----			(4)
Stromfunktion (1,1)	$dX/d\tau = -\sigma X$	$+\sigma Y$		
Temperatur (1,1)	$dY/d\tau = -Y$	$+rX$	$-XZ$	
Schichtung (0,2)	$dZ/d\tau = -bZ$		$+XY$	
	Dämpfung	parametr. Anregung	nichtlineare Wechselwirkung	

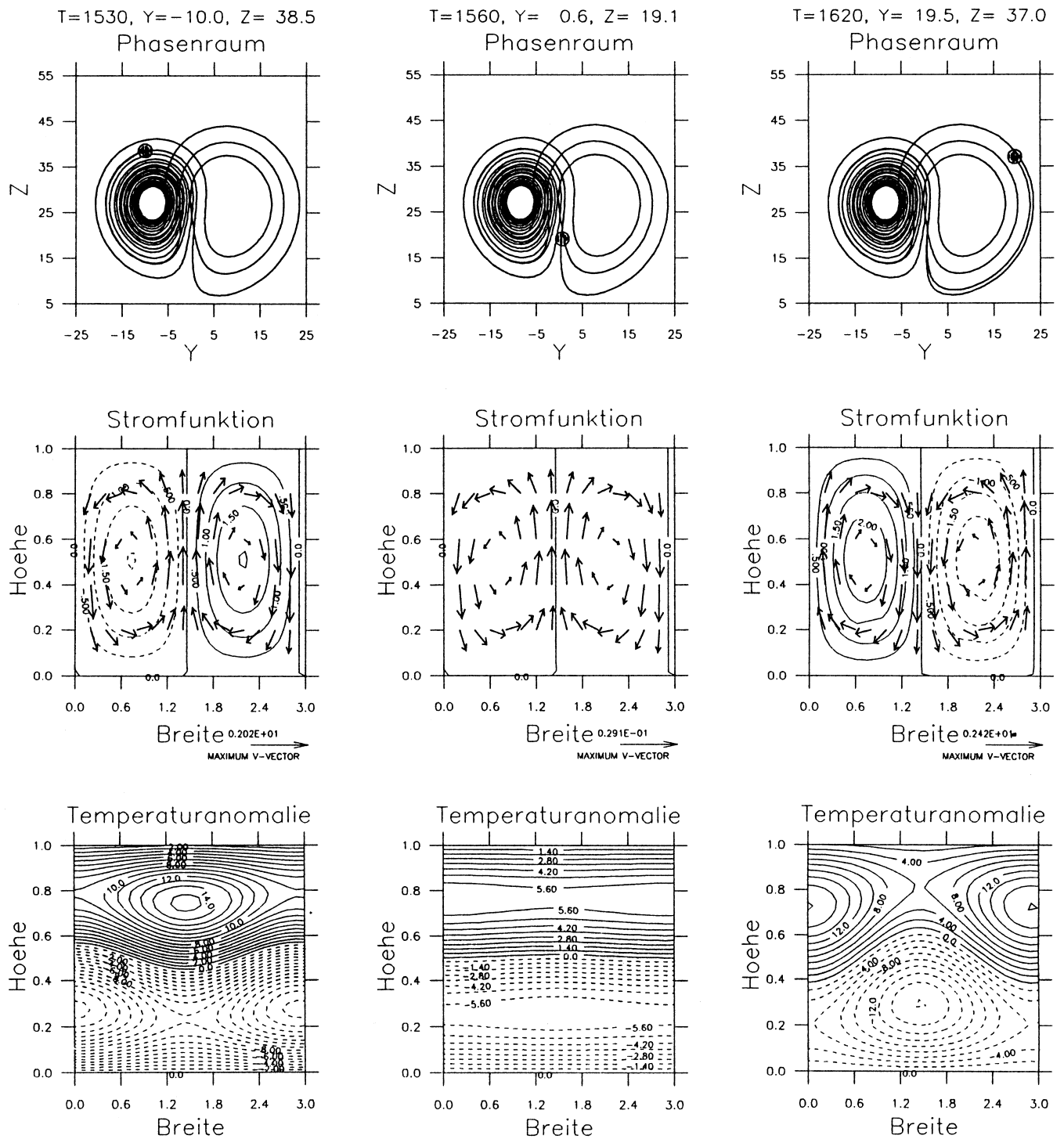
Neben den im linearen Modell (3d) eingeführten dimensionslosen Variablen kommt hier noch ein Koeffizient $b=4/(1+a^2)$ und die Variable $Z=\Theta_2\pi r/\Delta T$ hinzu. Das Modell ist keine vollständige Approximation des Konvektionsproblems, es besitzt jedoch zahlreiche und interessante Strukturen. In dem von den dimensionslosen Amplituden (X,Y,Z) aufgespannten Phasen-Raum wird die zeitlich-räumliche Entwicklung der Moden $\psi_1, \theta_1, \theta_2$ als Trajektorie dargestellt, $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, \tau)$ mit $\mathbf{X}(\tau)=[X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)]$:

PHASENRAUM- UND FELD-DARSTELLUNG: Die klassische Parameter-Konstellation für die Darstellung des chaotischen Attraktors ist $\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$. Dann beobachtet man die Trajektorie, wie sie um zwei 'Schmetterlingsflügel' kreist; das heißt, die Integralkurven $\mathbf{X}(\tau)$ verhalten sich wie zwei Oszillatoren, die erst um einen und dann um den anderen Flügel 'spiralen' und scheinbar zufällig umklappen. In **Figur-4** sind eine Phasenraum-Trajektorie $\mathbf{X}(\tau)$ und ihre physikalische Repräsentation $[\Psi_1(t)F_0, \Theta_1(t)F_1, \Theta_2(t)F_2]$ zu drei verschiedenen Zeitpunkten dargestellt: Die ψ -Rolle (X- oder Ψ_1 -Komponente) ändert ihren Drehsinn (die Phasenraum-Trajektorie wechselt den Flügel) nachdem sie genügend 'Wärme' oder 'Kälte' (Y- oder Θ_1 -Komponente) aufwärts bzw. abwärts transportiert hat (Korrelation mit der X- oder Ψ_1 -Komponente) und damit zur Änderung der vertikalen Schichtung (Z- oder Θ_2 -Komponente) beigetragen hat. Diese Schichtungs-Änderung führt zur Änderung der Stabilität in dem aufwärts gerichteten Ast (er wird stabiler, da oben wärmer), so daß eine Umkehrung der Rollen-Bewegung einsetzen kann. Die beiden Schmetterlingsflügel repräsentieren jeweils ein Typ oder Regime von Rollenbewegung. Die Z-Achse (Θ_2 -Komponente oder Schichtung) ist immer positiv, nur ist der Wert mal kleiner mal größer.

3 STRUKTURELLE STABILITÄT UND EIN WEG INS CHAOS

Die qualitative Struktur und damit auch die Stabilität eines dynamischen Systems werden in der unmittelbaren Umgebung von 'Ausnahme-Trajektorien', wie z.B. Fixpunkten, ermittelt. Diese Analyse läßt sich geometrisch veranschaulichen, wenn man die Dynamik des Lorenz-Systems als Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ im Phasenraum (X,Y,Z) interpretiert:

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{V}(\mathbf{X}).$$



FIGUR-4: Phasenraum (nur X,Y-Koordinaten) und Raum der physikalischen Variablen Stromfunktion $\psi(x,z,t)$ und Temperatur-Störung $\theta(x,z,t)$. Den Orten im Phasenraum (dicker Punkt, oben) entsprechen die dazu gehörenden Stromlinien- und Temperatur-felder (unten).

STABILITÄT: Die Stabilität einer Lösung, $\mathbf{X}(t)=[X(t),Y(t),Z(t)]$, wird im (X,Y,Z) -Raum über das Verhalten einer Nachbarlösung $\mathbf{X}(t)+\delta\mathbf{X}(t)$ mit dem Störungs-Vektor $\delta\mathbf{X}(t)$ definiert. Nach Taylor-Entwicklung wird so Stabilität lokal (in der unmittelbaren Umgebung der Ausnahme-Trajektorie) durch ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen charakterisiert:

$$\begin{aligned} d\delta\mathbf{X}/dt &= \mathbf{V}(\mathbf{X}(t)) + \partial\mathbf{V}(\mathbf{X})/\partial\mathbf{X}|_{\mathbf{X}}\delta\mathbf{X}(t) + O(\delta\mathbf{X}^2)+\dots - \mathbf{V}(\mathbf{X}(t)) \\ &= (\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{X})|_{\mathbf{X}(t)}\delta\mathbf{X}(t) + \dots = \mathbf{J}\{\mathbf{X}\} \delta\mathbf{X}(t), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{J}\{\mathbf{X}\}=\partial\mathbf{V}(\mathbf{X})/\partial\mathbf{X}|_{\mathbf{X}}=(\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{X})|_{\mathbf{X}}$ die Jacobi-Matrix am Ort $\mathbf{X}$ darstellt. Damit reduziert sich das Stabilitätsproblem auf die Analyse der Lösung von $\delta\mathbf{X}(t)$ und der Eigenwerte/Eigenvektoren der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\mathbf{X})$. Das Spektrum der Eigenwerte oder lokalen charakteristischen Exponenten beschreibt die lineare Dynamik (des Flusses) in der nahen Umgebung von $\mathbf{X}$.

SPÉKTRUM DER LYAPUNOV-EXPONENTEN: Nach der Stabilitätsanalyse an festen Orten $\mathbf{X}$ (zum Beispiel von stationären Lösungen) muß die Stabilität beliebiger quasi-periodischer und chaotischer Lösungen betrachtet werden. Dies geschieht mit Hilfe des Spektrums von Lyapunov-Exponenten, einer Verallgemeinerung der charakteristischen Exponenten (oder der Eigenwerte, z.B. Parker und Chua 1989)). Zum zeitkontinuierlichen dynamischen System $d\mathbf{X}/dt=\mathbf{V}(\mathbf{X})$ samt einer Lösungstrajektorie $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0,t)$ mit Anfangswert $\mathbf{X}_0=\mathbf{X}(\mathbf{X}_0,t_0)$ gehört ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (Variations-Gleichung), $d\mathbf{M}(\mathbf{X}_0,t)/dt=\mathbf{J}\{\mathbf{X}(\mathbf{X}_0,t)\}\mathbf{M}(\mathbf{X}_0,t)$ samt Anfangswert $\mathbf{M}(\mathbf{X}_0,t_0)=\mathbf{I}$. Mit diesem System verändert sich ein anfänglich orthogonaler Satz von Störungsvektoren unter Einfluß der zeitvariablen Jacobi-Matrix $\mathbf{J}\{\mathbf{X}(\mathbf{X}_0,t)\}$, die auch als Zustandsübergangsmatrix (oder Tangenten-Abbildung, tangent map) interpretiert werden kann: $\delta\mathbf{X}(t)=\mathbf{M}\delta\mathbf{X}(t_0)$. Die Eigenwerte $\mathbf{m}(t)$ der Lösung der Variations-Gleichung, $\mathbf{M}(\mathbf{X}_0,t)$, führen zum Spektrum der Lyapunov-Exponenten:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \{ (t^{-1}) \ln |m_i(t)| \}.$$

Die Exponenten können nach unterschiedlichen Methoden berechnet werden (z.B. Eckmann und Ruelle 1985, Parker und Chua 1989). Ihr Spektrum klassifiziert Attraktoren global (**ANHANG**): Bei chaotischen dissipativen Systemen muß (a) ihre Summe negativ sein, d.h. das Phasenvolumen muß schrumpfen, (b) ein Lyapunov-Exponent muß verschwinden (entlang der Trajektorien-Richtung), (c) mindestens einer muß positiv sein wegen interner Instabilitäten.

STRUKTURELLE STABILITÄT: Neben der Stabilität bei zeitlicher Entwicklung wird strukturelle Stabilität eines dynamischen Systems im Parameter-Raum analysiert: $d\mathbf{X}/dt=\mathbf{V}(\mathbf{X},\mathbf{p})$. Externe Parameter $\mathbf{p}$ können als langsame Variable verstanden werden, die als Randbedingungen die qualitative Struktur der zeitlichen Evolution bestimmen. Strukturelle Stabilität bedeutet, daß kleine Parameter-Änderungen die topologische Struktur des Attraktors invariant lassen. Instabilitäten treten an Bifurkations- (Verzweigungs-) Punkten auf, an denen eine qualitative Änderung des Flusses stattfindet. Elementare Katastrophen, zum Beispiel, sind klassifizierbare Bifurkationen in einem Gradient-System, das nur wenige externe Parameter besitzt. Im folgenden sollen stichwortartig erste Ergebnisse einer Stabilitäts-Analyse des Lorenz-Attraktors aufgezeigt werden.

STATIONÄRE LÖSUNGEN UND STABILITÄTSANALYSE (FIGUR-5a-c): Stationäre Lösungen oder Fixpunkte sind eine Art von Ausnahme-Trajektorien. Die Gleichgewichtsbedingung ($d/dt=0$, index e) führt zur kubischen Gleichung, $X_e^3 + b(1-r)X_e = 0$, mit drei Lösungen: einen 'Ursprung' und zwei 'Augen'. Die Lösung im 'Ursprung' existiert stets; sie stellt das ruhende Fluid dar. Die 'Augen' existieren erst, wenn Konvektion einsetzt, $r=Ra/Ra_c > 1$, also die kritische Rayleigh-Zahl überschritten wird (z.B. Sparrow 1982, Lorenz 1963, Ott 1993):

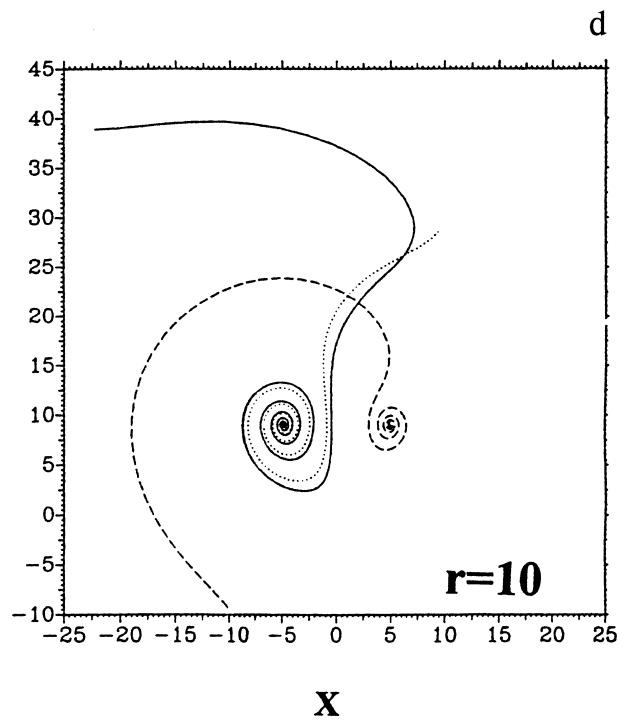
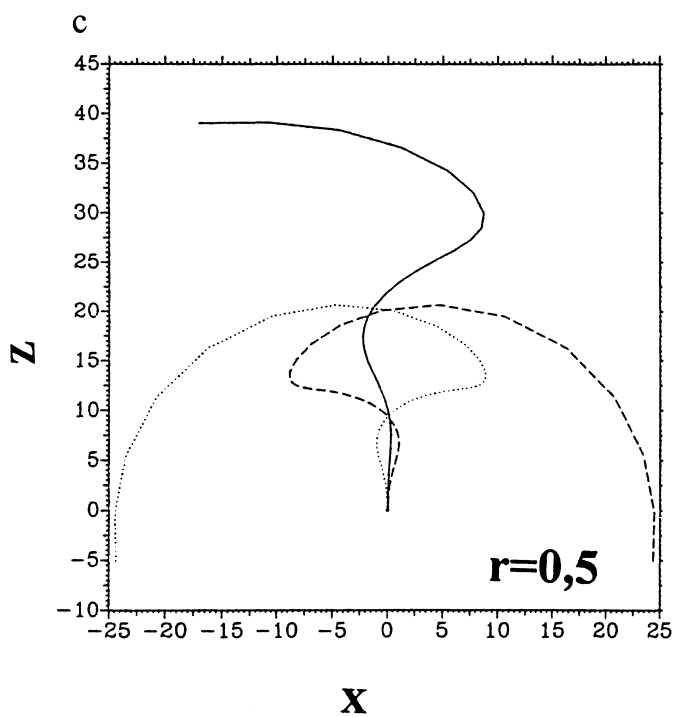
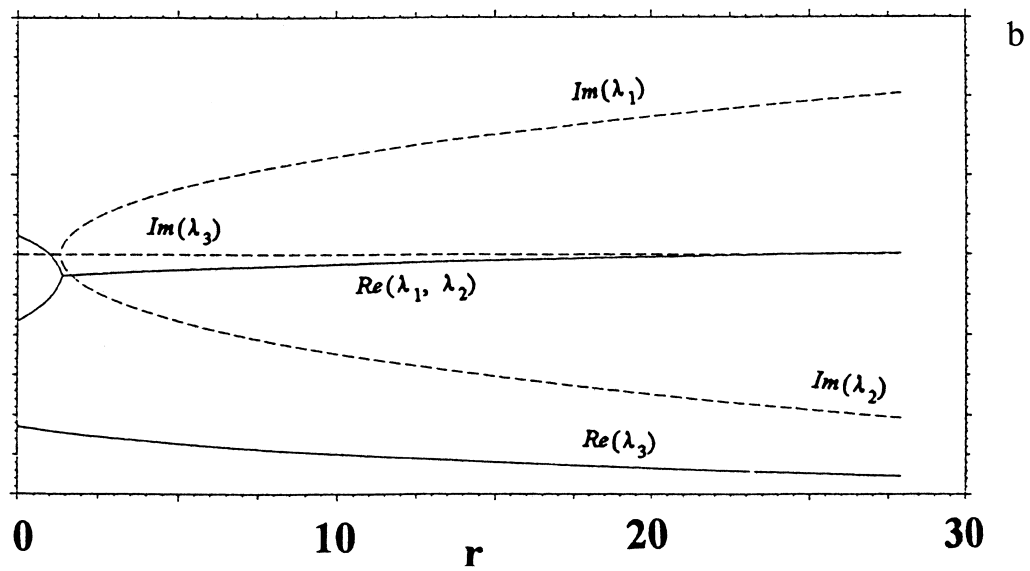
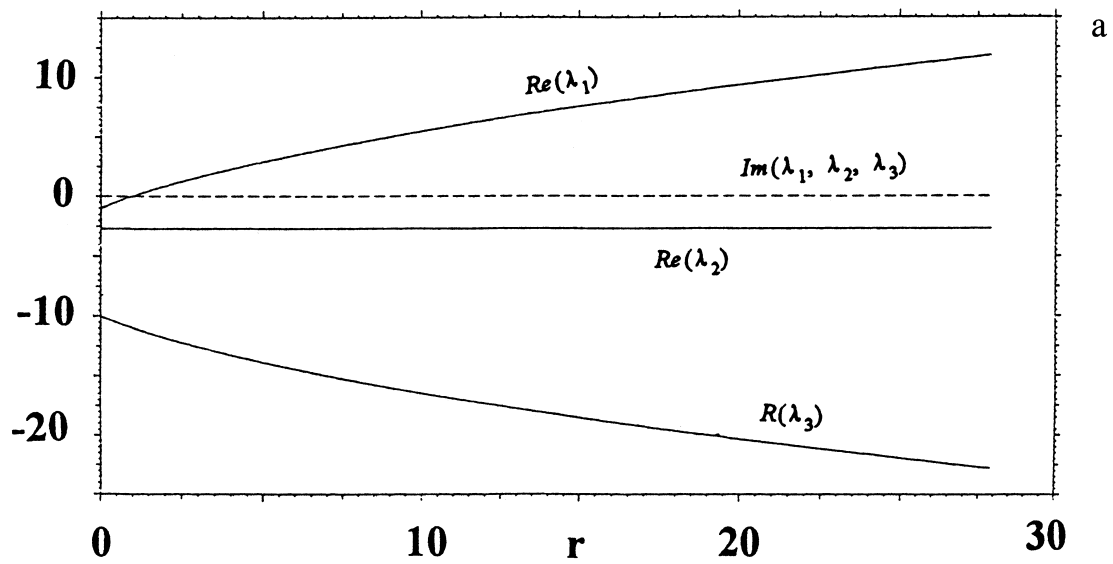
$$\begin{aligned} \text{URSPRUNG:} & \quad C_1=(X,Y,Z)_e=(0,0,0) \text{ und} \\ \text{AUGEN:} & \quad C_{2,3}=\{\pm[b(r-1)]^{1/2}, \pm[b(r-1)]^{1/2}, r-1\}. \end{aligned}$$

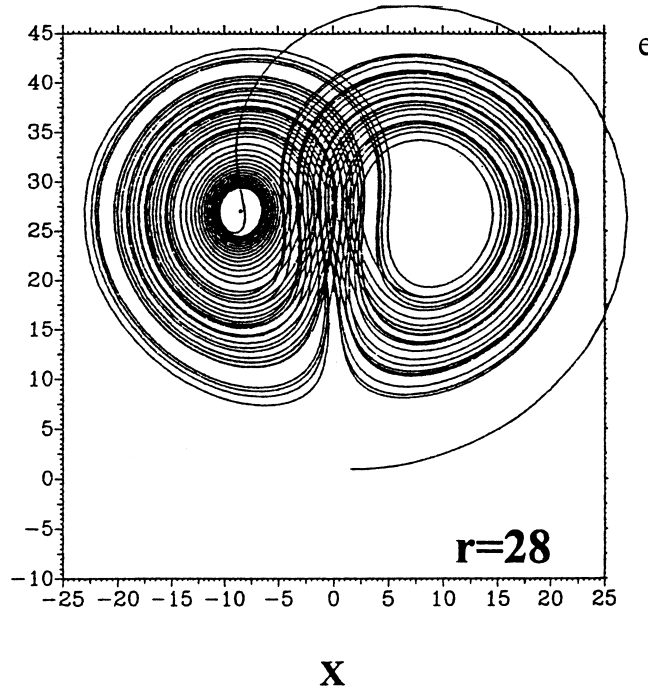
Die Stabilitätsanalyse erfolgt mit Hilfe des Systems linearer Differentialgleichungen, die den Fluß in der Umgebung von Orten im Phasenraum, $(X,Y,Z)_0$, wie zum Beispiel die Ausnahme-Trajektorie, bestimmen. Dazu dienen die Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-Z_0 & -1 & -X_0 \\ Y_0 & X_0 & -b \end{pmatrix}$$

Das Eigenwert-Problem, $|\mathbf{J}-\lambda\mathbf{I}|=0$, führt zum charakteristischen Polynom:

$$P(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (5)$$





FIGUR-5: Eigenwerte der Jacobi-Matrix an den stationären Punkten des Lorenz-Systems: (a) im Ursprung und (b) an den beiden 'Augen' in Abhängigkeit vom Parameter r (Rayleigh-Zahl). Die Realteile der Eigenwerte sind durchgezogene Linien, Imaginärteile gestrichelt. (c) Lösungsstrukturen des Lorenz-Systems in Abhängigkeit vom Parameter r : (a) $r=0.5$, (b) $r=10$, (c) $r=28$, vergleiche vertikale Linien in Figur 5a.

mit $a_0=1$, $a_1=(1+\sigma+b)$, $a_2=\sigma(1+b-r+Z_0)+b+X_0^2$, $a_3=\sigma(b+X_0^2-rb+bZ_0+X_0Y_0)$. Die Analyse der Eigenwerte λ , ihr Real- und Imaginärteil $\text{Re}\lambda \neq 0$ und $\text{Im}\lambda$, und ihre Abhängigkeit von der Parameter-Anregung (Rayleigh-Zahl r) bei festem $b=8/3$ und $\sigma=10$ (**FIGUR-5**) führt zur qualitativen Beschreibung der lokalen Phasenraum-Dynamik in der Nähe der Fixpunkte $C_{1,2,3}$ des Lorenz-Modells.

'URSPRUNG' $C_1=(0,0,0)$: Das charakteristische Polynom an diesem Fixpunkt,

$$P(\lambda) = (\lambda+b)(\lambda^2+(\sigma+1)\lambda-\sigma(r-1)) = 0, \quad (5a)$$

hat immer eine negative reelle Wurzel $\lambda_3=-b<0$; der dazu gehörende Eigenvektor zeigt entlang der Z-Achse. Die anderen Eigenwerte, $\lambda_{1,2}$, sind bereits beim linearen Modell im 2-dimensionalen (X,Y)-Phasenraum diskutiert worden.

'AUGEN' $C_{2,3}=\{\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1\}$: Sie existieren erst ab $r>1$. Das charakteristische Polynom (5) hat von der Rayleigh-Zahl r abhängige Wurzeln:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma+1+b)\lambda^2 + (\sigma b+rb)\lambda + \sigma[2b(1-r)] = 0. \quad (5b)$$

Es ermöglicht Aussagen über die qualitative Dynamik in der nahen Umgebung der 'Augen' (siehe **FIGUR-5**):

- $r_1=1$:** $\lambda_1=0$; $\lambda_2=-(\sigma+1)$, $\lambda_3=-b$, da $\lambda^2+\lambda(\sigma+1+b)-b(\sigma+1)=0$.
- $r_1<r<r_2$:** $\text{Re}\lambda_{1,2}<0$ von $\lambda_{1,2}$ konjugiert komplex, $\lambda_3<0$ reell. Nach Routh-Hurwitz: $D_1=a_1>0$, $D_2=a_1a_2-a_3>0$, $D_3=a_3=2b\sigma(r-1)>0$ für $r>1$.
'Augen' sind asymptotisch stabile Fixpunkte: Fluid rotiert dort mit konstanter Vorticity ohne Temperaturänderung; Anfangswert bestimmt Vorzeichen.
- $r=r_2 \approx 24.74$** $\text{Re}\lambda_{1,2}=0$ mit $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{a_2}$, $\lambda_3=-a_1<0$.
 $D_2=0$ gibt $r_2=\sigma(3+b+\sigma)/(\sigma-1-b) \approx 24,74$.
 $D_2=0 \rightarrow a_1a_2=a_3$, $\lambda^3+\lambda^2a_1+\lambda a_2+a_1a_2=(\lambda_3-a_1)(\lambda_1+i\sqrt{a_2})(\lambda_2-i\sqrt{a_2})=0$.
- $r>r_2$:** $\text{Re}\lambda_{1,2}>0$: 'Augen' sind instabile Fixpunkte (Sattelstrudel).

Im Parameter-Bereich $r > r_2$ bewegen sich die Lösungs-Trajektorien auf einem seltsamen Attraktor (ANHANG, z.B. Schuster 1989, Tsonis 1992). Er kennzeichnet chaotische Dynamik oder sensitive Abhängigkeit von Anfangsbedingungen. Die Rollen-Konvektion wird von Vorticity- und Temperatur-Feldern geprägt, die irregulär ihre Intensität und ihr Vorzeichen ändern; im Phasenraum zeigt der Sattel-Strudel oszillatorisches Aufschaukeln. - Weitere Erhöhung der parametrischen Anregung verändert die Strukturen im Lorenz-System. Sie sind jedoch nur mit globalen Maßen, z.B. dem Spektrum der Lyapunov-Exponenten, zu analysieren, da lokale lineare Ansätze nicht ausreichend sind.

SPEKTRUM DER LYAPUNOV-EXPONENTEN: Das Phasenraum-Volumen konvergiert beim Lorenz-Attraktor, da $\text{div}\mathbf{V} < 0$, und damit ist die Summe über das Spektrum der Lyapunov-Exponenten negativ:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{div}\mathbf{V} = \text{div}(d\mathbf{X}_i/dt) = -(\sigma + b + 1) < 0.$$

Das heißt, das Lorenz-System ist dissipativ und der Attraktor nimmt ein sogenanntes Null-Volumen innerhalb des 3-dimensionalen Phasenraumes ein, also 0-dim. Punkte, 1-dim. Grenzzyklen, 2-dim. Flächen, Tori oder Fraktale (z.B. Tsonis 1992) der Dimension < 3 , auf denen sich die Lösungen nach 'vergessenen' Anfangsbedingungen bewegen. Da ein weiterer Lyapunov-Exponent in chaotischen Systemen verschwindet, reicht es beim Lorenz-Attraktor aus, den größten Lyapunov Exponenten, $\lambda_{\max}$, zu bestimmen, um das ganze Spektrum zu erhalten: ${}_1\lambda = \lambda_{\max} > 0, {}_2\lambda = 0, {}_3\lambda = -(\sigma + b + 1) - \lambda_{\max}$ (**FIGUR-6a**). Ist $\lambda_{\max} = 0$, so treten Grenzzyklen auf, wie es in verschiedenen Bändern der relativen Rayleigh-Zahl der Fall ist (**FIGUR-6b**). Man kann so weitere Strukturen aus dem Lyapunov-Spektrum ermitteln:

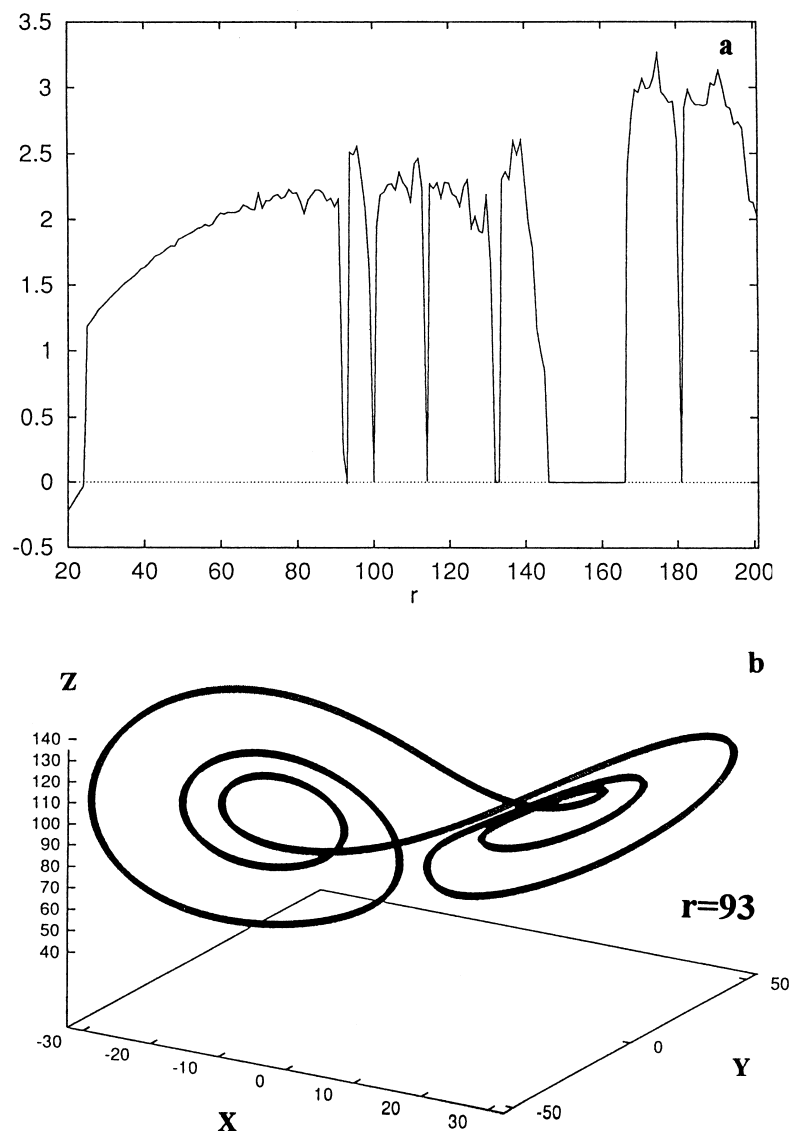


FIGURE-6: (a) Maximaler Lyapunov-Exponent in bits/Zeiteinheit in Abhängigkeit von der relativen Rayleigh-Zahl r . (b) Lösungstrajektorie (Grenzzyklus) im Fenster von $r=93$.

$r_2 < r < r_3 \approx 145$	chaotischer Attraktor mit periodischen Fenstern (FIGUR-6b),
$r_3 < r < r_4 \approx 166$	stabiler Grenzzyklus mit Perioden-Verdopplung und Band-Aufspaltung
$r_4 < r < r_5 \approx 235$	chaotischer Attraktor mit periodischen Fenstern.

WEGE INS CHAOS: Die qualitative Struktur-Änderung der Attraktoren unterschiedlicher dynamischer Systeme (von Fixpunkten bis hin zu seltsamen Attraktoren) führt mit wachsender parametrischer Anregung auf unterschiedlichen Wegen ins Chaos (z.B. Loistl und Betz 1994, Jetschke 1989, Schuster 1989); Bifurkations- und Regime-Diagramme veranschaulichen diese Wege, die vom jeweiligen dynamischen System abhängen. Sie alle starten bei einem Fixpunkt und gehen dann mit wachsender Parameteranregung über in einen Grenzzyklus. Von da ab können sie sich unterscheiden. Oft findet man folgende Wege (routes to chaos):

Perioden-Verdopplung (Feigenbaum): Periodenverdopplung → Chaos
Hopf-Bifurkation (Ruelle, Takens, Newhouse): Torus → Chaos
Intermittenz (Pomeau, Manneville): Intermittenz → Chaos.

Für die unmittelbare meteorologische Anwendung sind solche Wege ins Chaos selten relevant. Für die Probleme der Vorhersagbarkeit aber zeigt sich, daß der seltsame Lorenz-Attraktor qualitative Ähnlichkeit mit der großräumigen Zirkulation aufweist, da er Regime-Struktur besitzt und die Vorhersagbarkeit im Phasenraum variiert. Deshalb wird die Analyse des Lorenz-Attraktors auf dem Gebiet der Vorhersagbarkeit fortgesetzt.

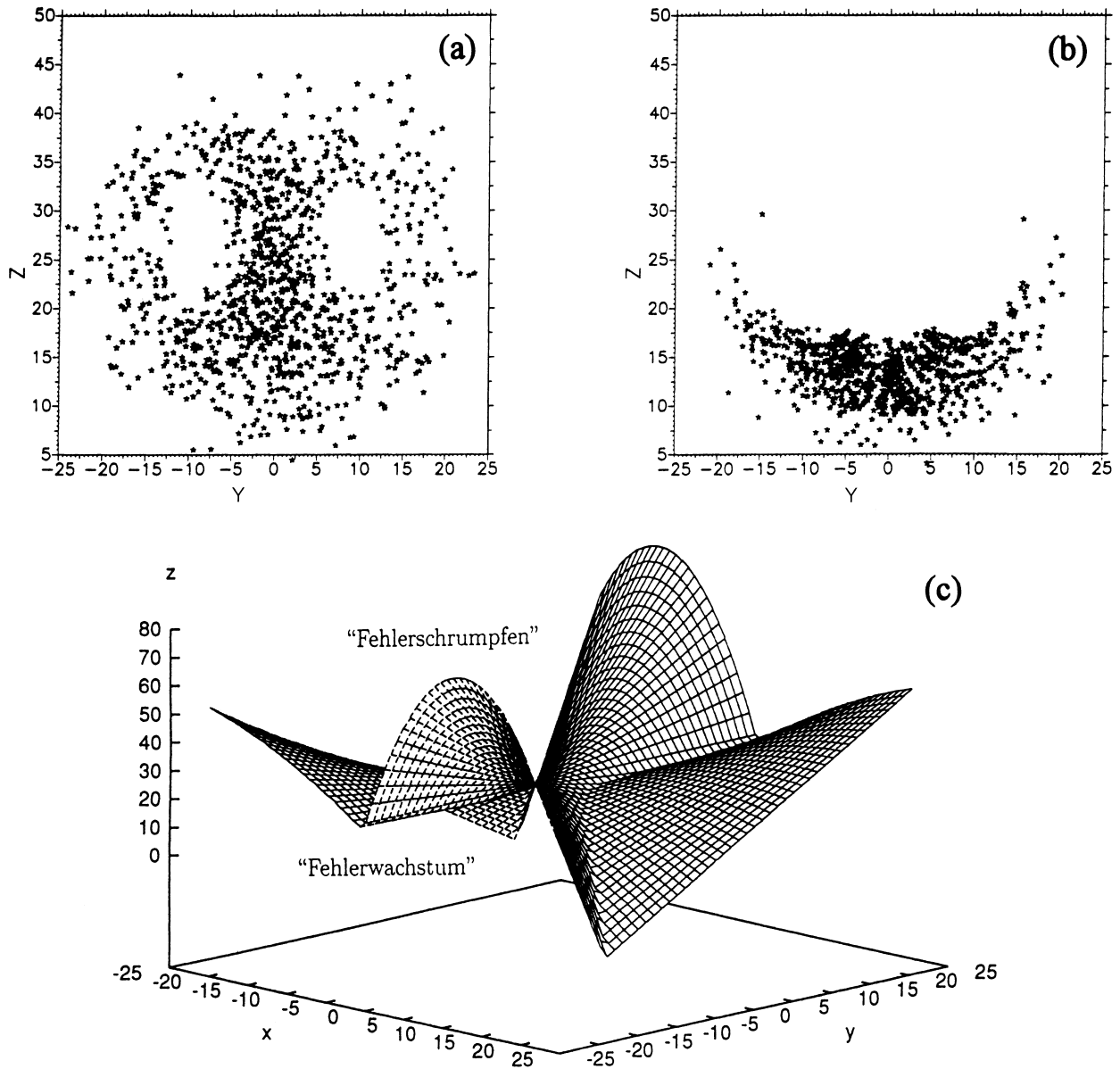
4. VORHERSAGBARKEIT, CHAOS UND BÄCKER-TRANSFORMATION

Wird eine 'Surrogat'-Atmosphäre von demselben dynamischen System simuliert und (ohne systematischen Fehler) prognostiziert, so führt das zur theoretischen - im Vergleich zur praktischen - Vorhersagbarkeit. **Theoretische Vorhersagbarkeit** charakterisiert also die Statistik der Prognose-Fehler eines perfekten Modells. Um eine Statistik von Prognose-Fehlern zu erhalten, werden **Vorhersagbarkeits-Experimente** wie folgt durchgeführt. In einer perfekten Modell-Umgebung ist der 'wahre' Anfangswert, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0)$, bekannt; der Anfangsfehler $|\delta \mathbf{X}_0| = |\delta \mathbf{X}(t_0)|$ zur Zeit t_0 wird vorgegeben, ist klein und soll, vom gewählten Modell-Anfangswert, $\mathbf{X}_0 + \delta \mathbf{X}_0$, aus gesehen, in unterschiedlichen Richtungen im Phasenraum liegen. Dann entwickeln sich das 'wahre Wetter' oder die Verifikation und die Prognose auf zwei Trajektorien des Systems: $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0; t)$ und $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0 + \delta \mathbf{X}_0; t)$; ihr Abstand ist ein Maß für den Prognose-Fehler. Eine **Analyse der Vorhersagbarkeit** versucht, (nichtlineare) Strukturen aus der Fehler-Statistik zu bestimmen. Prognose-Fehler, das heißt, Abstände zwischen Prognose- und Verifikations-Trajektorien, sind abhängig von Anfangswerten und ändern sich mit wachsendem Vorhersage-Intervall $t = \Delta t$; sie beschreiben das Wachstum oder Schrumpfen von Störungen; sie werden durch dynamische Instabilitäten verursacht, so wie das Wachstum einer kleinen Störung (in einem perfekten Modell) dem eines kleinen unbekannten Fehlers in einer perfekt modellierten Atmosphäre entspricht. Das heißt: Die begrenzte Vorhersagbarkeit des Wetters beruht auf dem ungenauen Anfangsfeld *und* den internen Instabilitäten des Systems; eine Analyse von Prognose-Fehlern ist damit auch angewandte 'Störungs-Theorie'. Dazu kommen bei der realen Wetterprognose die systematischen Modell-Fehler.

EIN VORHERSAGBARKEITS-EXPERIMENT IM LORENZ-MODELL: Startet man Vorhersagen im Lorenz-System mit Anfangsbedingungen $\mathbf{X}(t_0)$, die gleichmäßig im Phasenraum verteilt sind, so beobachtet man für die anfänglich gleichgroßen Fehler, $\delta \mathbf{X}(t_0)$, die den Anfangswerten zugeschlagen wurden, daß sie wachsen aber auch schrumpfen können. Das heißt, das Ereignis der Fehlerverdopplung, $|\delta \mathbf{X}(t_0 + T_2)| = 2|\delta \mathbf{X}(t_0)|$, das zu einer Zeit T_2 stattfindet, findet man nur in besonderen Bereichen des gesamten Phasenraumes, während andere Bereiche besser vorhersagbar sein können (**FIGUR-7a,b**).

ANALYTISCHE BESCHREIBUNG: Das charakteristische Polynom zur Jacobi-Matrix liefert die Eigenwerte, und das Routh-Hurwitz Kriterium (**ANHANG**) führt zu einer Aussage über das Vorzeichen ihrer Realteile und damit über das lokale Anwachsen/Abklingen von Störungen an allen Orten des Phasenraums, ohne die Eigenwerte explizit zu berechnen. Dazu wird das charakteristische Polynom (5)

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^3 + \lambda^2 a_1 + \lambda a_2 + a_3 = 0,$$



FIGUR 7a-c: Anfangszustände (Projektion in die (X,Y)-Ebene) für die Durchführung des Vorhersage-Experimentes (a) und die entsprechende Lage dieser Zustände nach der Zeit T_2 der Fehler-Verdopplungszeit. (c) Lage der Fläche $Z(X,Y)$, die den drei-dimensionalen Phasenraum des Lorenz-Modells in ein Gebiet mit positiven (Fehler-Wachstum) und negativen (Fehler-Schrumpfen) Wachstumsraten teilt.

mit $a_0=1$, $a_1=1+\sigma+b$, $a_2=\sigma(1+b-r+Z)+b+X^2$, $a_3=\sigma(b+X^2-rb+bZ+XY)$ im Phasenraum weiter analysiert. Nach dem Routh-Hurwitz Kriterium ergeben sich die Bedingungen, nach denen die Realteile der Eigenwerte der Jacobi-Matrix negativ sind: $\text{Re}\lambda_i < 0$. Danach haben alle Wurzeln von $P(\lambda)=0$ genau dann negative Realteile, wenn folgende Ungleichungen für die Koeffizienten gelten, vorausgesetzt $D_1=a_0=1>0$: $D_2=a_1a_2-a_3>0$ und $D_3=a_3>0$. Das führt zu zwei Flächen im (X,Y,Z)-Phasenraum, die explizit dargestellt werden können, wenn man die beiden Bedingungen $D_2, D_3>0$ nach $Z_{1,2}(X,Y)$ auflöst. Sie sind in einem Gebiet (X,Y,Z^*) erfüllt, in dem $Z^*>Z_1$ und $Z^*>Z_2$ gilt. Dieser Bereich liegt oberhalb der $\min(Z^*)$ -Fläche, die in **FIGUR-7c** dargestellt ist. Es zeigt sich, daß bei fast jedem 'orbit' um eines der Augen die Trajektorie das $(\text{Re}\lambda_i < 0)$ -Gebiet oberhalb der Fläche *und* das $(\text{Re}\lambda_i > 0)$ -Gebiet darunter passiert. Im Gebiet (Z^*, X, Y) mit $\text{Re}\lambda < 0$, schrumpfen Umgebungen von Trajektorien, darunter expandieren sie $(\text{Re}\lambda > 0)$. Damit ist der Lorenz-Attraktor zweigeteilt in einen gut vorhersagbaren stabilen Bereich, in dem Fehler schrumpfen, und ein schlecht vorhersagbares Regime, bei dem interne Instabilitäten $(\text{Re}\lambda > 0)$ mit exponentiellem Wachstum kleiner Störungen die Ursache der Nichtvorhersagbarkeit sind, wenn ein unvermeidbarer Anfangsfehler vorliegt.

BÄCKER-TRANSFORMATION UND CHAOS: Dieses abwechselnde Falten (oder Schrumpfen) und Strecken ist ein bekannter Generator von Chaos. Anschaulich zeigt das die zeitlich diskrete Bäcker-Abbildung: jeder Zeitschritt (Iteration) entspricht einem Ausrollen oder Strecken eines Brot-Teiges auf seine doppelte Länge und einem anschließenden Zusammenfalten oder Schrumpfen, wobei mit wachsenden Iterationen der Ort eines Punktes im Teig immer schwieriger zu prognostizieren ist. Die Faltungs- und die Streckungsgebiete können im kontinuierlichen Lorenz-System explizit angegeben werden, wie sie nacheinander von den Lösungstrajektorien im Phasenraum durchlaufen werden, und zwar bei jeder Umkreisung (Orbit) eines der 'Attraktorflügel'. Viele niedrig-dimensionale chaotische Systeme zeigen im Chaos solche Trennflächen zwischen Strecken und Schrumpfen.

5 AUSBLICK

Das Lorenz-System (Sektion 2) enthält zahlreiche qualitative Ähnlichkeiten mit der großräumigen Zirkulation der Atmosphäre. Eine dieser Ähnlichkeiten besteht darin, daß eine Regime-Struktur (Sektion 3) vorhanden ist, die andere liegt in der Variabilität der Vorhersagbarkeit auf dem seltsamen Attraktor (Sektion 4). Aus diesem Grund bilden niedrig-dimensionale Systeme mit chaotischem Attraktor eine Art konzeptionelles Modell für theoretische Vorhersagbarkeit, Ensemble Prognosen etc. (z.B. Palmer 1993a,b; Ziehmann et al. 1995). Mit Hilfe dieser konzeptionellen Ansätze können geeignete Vorhersagbarkeits-Experimente mit komplexen Wetter- und Klima-Modellen entworfen und interpretiert werden. Konzept-Modelle zur theoretischen Vorhersagbarkeit müssen natürlich noch ergänzt werden von Konzept-Modellen zur praktischen Vorhersagbarkeit (Fraedrich und Ziehmann 1996); das allerdings ist ein neues Thema.

DANKSAGUNG: Diese Arbeit stellt Untersuchungen aus Literatur und Lehrbüchern zusammen und insofern nichts prinzipiell Neues dar. Sie beruht auf Teilen meiner Vorlesung 'Theoretische Meteorologie I'. Christine Ziehmann fand die topologisch überraschend einfache Struktur vom 'Strecken und Schrumpfen' im Lorenz-Attraktor; sie und Frank Sielmann erstellten Abbildungen. Thomas Frisius gab den Hinweis für die direkte Wahl der am Lorenz-Attraktor beteiligten Moden. Herr M. Dunst las eine letzte Version sehr sorgfältig.

LITERATUR (Auswahl)

Argyris, J.H., G. Faust und M. Haase, 1995: Die Erforschung des Chaos. Vieweg-Verlag, 383pp.

Charney J.G., 1947: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. J. Meteor., 4, 135-162.

Chandrasekhar, S., 1961: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford University Press, 652pp.

Drazin, P.G., and W.H. Reid, 1981: Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, 527pp.

Eady, E.T., 1949: Long waves and cyclone waves. Tellus, 1, 33-52.

Eckmann, J.P. und D.Ruelle, 1985: Ergodic theory of chaos and strange attractors. Rev. of Modern Physics, 57, 617-656.

Fraedrich, K. und Chr. Ziehmann, 1995: Praktische Vorhersagbarkeit: Persistenz in rotem Rauschen. Meteorol. Zeitschrift, N.F. 4, 139-149.

Ghil, M., und S. Childress, 1987: Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory, and Climate Dynamics. Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences 60, 485pp.

Jackson, E.A. 1990: Perspectives of Nonlinear Dynamics. Cambridge Univ. Press., 633pp.

- Jetschke, G., 1989: Mathematik der Selbstorganisation. Vieweg-Verlag, 328pp.
- Lindzen, R.S., 1990: Dynamics in Atmospheric Physics. Cambridge Univ. Press, 310pp.
- Loistl, O., und I. Betz, 1994: Chaostheorie: zur Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme. R. Oldenbourg Verlag, 124pp.
- Lorenz, E.N., 1963: Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci., 20, 130-141.
- Lorenz, E.N., 1993: The Essence of Chaos. University of Washington Press, 227pp.
- Ott, E., 1993: Chaos in Dynamical Systems. Cambridge University Press, 385pp.
- Palmer, T.N., 1993: A nonlinear dynamical perspective on climate change. Weather, 48, 314-326.
- Palmer, T.N., 1993: Extended-Range Atmospheric Prediction and the Lorenz Model. Bull. Amer. Meteor. Soc., 74, 49-65.
- Parker, T.S. und L.O. Chua, 1989: Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. Springer-Verlag, 348pp.
- Pichler, H. 1984: Dynamik der Atmosphäre. BI-Wissenschaftsverlag, 456pp.
- Rossby, C.G. 1939: Relations between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centres of action. J. Marine Res., 2, 38-55.
- Saltzman, B., 1962: Finite amplitude convection as an initial value problem. J. Atmos. Sci., 19, 329-341.
- Schuster, H.G. 1989: Deterministic Chaos. VCH Verlag, Weinheim, 270pp.
- Sparrow, C., 1982: The Lorenz equations. bifurcations, chaos and strange attractors. Applied Mathematical Sciences, 41. Springer-Verlag, 269pp.
- Strang, G. 1988b: Linear Algebra And Its Applications. Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, 505pp.
- Tsonis, A.A., 1992: Chaos - From Theory To Applications. Plenum Press, 274pp.
- Velarde, M.G. und Ch. Normand, 1980: Konvektion. Spektrum der Wissenschaft, September 1980, 119-131.
- Ziehmann-Schlumbohm, C., K. Fraedrich und L. Smith, 1995: Ein internes Vorhersagbarkeitsexperiment im Lorenz-Modell. Meteorol. Zeitschrift NF 4, 16-21.
- Ziehmann-Schlumbohm, Chr., 1994: Vorhersagestudien in chaotischen Systemen und in der Praxis - Anwendung von Methoden der nichtlinearen Systemanalyse. Freie Universität Berlin, Institut für Meteorologie. Meteorol. Abh. N.F., Ser. A, 197pp.

ANHANG:

ATTRAKTOREN: Ein Attraktor ist eine abgeschlossene, beschränkte Punktmenge und invariant bzgl. des Flusses ("wenn einmal auf A, immer auf A"); es gibt eine Umgebung, die auf den Attraktor kontrahiert; Trajektorien auf dem Attraktor kommen jedem Punkt beliebig nahe (wenn $t \rightarrow \infty$). Insbesondere ist ein seltsamer Attraktor durch die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen gekennzeichnet. Die Lyapunov-Exponenten für Attraktoren im 3-dimensionalen Phasen-Raum sind in der Tabelle dargestellt; die dazu gehörenden Zeitreihen der Variablen kann man qualitativ sofort aufzeichnen ebenso wie den Fluß im Phasenraum.

TABELLE: Einige bekannte Attraktoren und die Vorzeichen des Spektrums der Lyapunov-Exponenten.

REGIME	LYAPUNOV-EXPONENTEN
stabile Fixpunkte	(-, -, -)
stabile Grenzzyklen	(0, -, -)
stabile Tori (Überlagerung inkommensurabler Frequenzen)	(0, 0, -)
seltsamer Attraktor	(+, 0, -)

ROUTH-HURWITZ-KRITERIUM: Die Eigenwerte λ_i einer Matrix **J** besitzen genau dann sämtliche negative Realteile, wenn für die Koeffizienten a_i des charakteristischen Polynoms, $P(\lambda) = a_n + a_{n-1}\lambda + \dots + a_1\lambda^{n-1}$, folgende Determinanten-Ungleichungen gelten:

$$a_0 = D_0 > 0; \quad a_1 = D_1 > 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = D_2 > 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ \vdots & & & \end{vmatrix} = D_3 > 0$$

Da $a_k = 0$ für $k > n$ kann D_n durch $D_{n-1}a_n$ ersetzt werden, so daß als letzte Bedingung gilt: $a_n > 0$.